

# 基于新型 Gregory 三角面片的 $G^1$ 连续曲面拼接

张华阳, 张志毅<sup>+</sup>, 杨 龙

(西北农林科技大学 信息工程学院, 陕西 杨凌 712100)

**摘要:** 为有效解决构造光滑曲面的三角网格插值问题, 将 Gregory 四边形面片的易控性嫁接到 Bézier 三角面片上, 提出一种新型双三次 Gregory 三角面片的插值模型。因为公共边界处的  $G^1$  连续仅取决于 2 个相邻三角面片的控制点或向量, 而无其它连续性限制, 所以, 该方法可有效消除使用 Gregory 四边形面片时需分割三角域产生的扭曲现象。实验结果表明, 使用该模型对给定的三角网格进行插值, 总能生成  $G^1$  连续的光滑曲面。

**关键词:** 网格插值; 光滑曲面; Gregory 三角面片;  $G^1$  连续

**中图分类号:** TP391.41 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-7024 (2014) 09-3119-04

## Research of $G^1$ smooth surface based on Gregory triangular patches

ZHANG Hua-yang, ZHANG Zhi-yi<sup>+</sup>, YANG Long

(College of Information Engineering, Northwest A and F University, Yangling 712100, China)

**Abstract:** To solve the triangular mesh interpolation problem of constructing a smooth surface effectively, a novel bi-cubic Gregory triangular patch for interpolation model was presented by grafting the controllability of Gregory quadrilateral patch into Bézier triangular patch. Because  $G^1$  continuity at the common boundary depends only on two adjacent triangular patches' control point or vector without other continuity restrictions, the method can effectively eliminate the distortions of splitting triangular domain which emerge when Gregory quadrilateral patch in used. Experimental results show that when the new bi-cubic Gregory triangular patch is used in triangular mesh interpolation, a  $G^1$  continuous smooth surface can always be generated.

**Key words:** mesh interpolation; smooth surface; Gregory triangular patch;  $G^1$  continuity

### 0 引言

在逆向工程、电脑动画和地质建模等应用领域中, 构造  $G^1$  连续的光滑曲面是基本要求之一。通过相邻面片间的拼接, 在其公共边界每个控制点处有相同的切平面, 保证其  $G^1$  连续<sup>[1]</sup>。目前最常用的拼接方法: 四边域曲面和三角域曲面。郝茹等<sup>[2]</sup>采用双四次有理 Bezier 曲面拼接算法来构造  $G^1$  连续光滑曲面; 随后高占恒等<sup>[3]</sup>采用 B 样条曲面以及施佩乐等<sup>[4]</sup>采用周期 B 样条曲面构造一阶几何连续光滑曲面; R. T. Farouki 等<sup>[5]</sup>采用 Coons 曲面和 Kouichi Konno 等<sup>[6]</sup>采用 Gregory 面片分别对曲面进行拼接构造光滑曲面, 但是他们采用的方法有一定的局限性<sup>[7]</sup>, 不能满足任意的拓扑结构。传统的 Gregory 三角面片和 Bézier 三角面片<sup>[8]</sup>

能够自由、灵活地表示任意拓扑结构, 但是并不能保证在任意情况下的  $G^1$  连续。

在本文中, 我们采用张志毅<sup>[9]</sup>提出的新双三次 Gregory 三角面片对给定的数据进行插值, 它不仅满足局部性, 而且满足任意三角形<sup>[9]</sup>或者四边形曲线曲面的拼接并能够达到  $G^1$  连续。

### 1 Gregory 三角面片

新的 Gregory 三角面片的几何定义请参考文献 [10], 其中  $G$  为 Gregory 三角面片的控制节点或控制网。如图 1 所示:  $G$  中的每个点称为控制点, 例如,  $\{P_0, P_1, P_2\}$  为角控制点,  $\{P_{01}, P_{10}, P_{12}, P_{21}, P_{20}, P_{02}\}$  为边界控制点,  $\{Q_{01}, Q_{10}, Q_{12}, Q_{21}, Q_{20}, Q_{02}\}$  为内部控制点。所有的

收稿日期: 2013-11-05; 修订日期: 2014-01-11

基金项目: 国家 863 高技术研究发展计划基金项目 (2013AA10230402); 中央高校基本科研业务费基金项目 (QN2013054); 国家自然科学基金项目 (61202188)

作者简介: 张华阳 (1987-), 男, 河南开封人, 硕士研究生, 研究方向为计算机图形学; +通讯作者: 张志毅 (1974-), 男, 山西运城人, 副教授, CCF 会员, 研究方向为计算机辅助设计与图形学; 杨龙 (1982-), 男, 陕西宝鸡人, 博士, 研究方向为计算机图形学与虚拟现实。E-mail: 512943703@qq.com

控制点可分为 3 个控制单元。

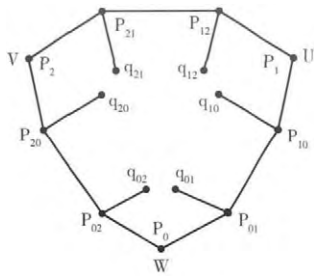


图 1 Gregory 三角控制网格

在三角面片中，我们用  $G_{NT}(u, v)$  表示在这个三角形重心坐标  $(u, v)$  中各个点的位置，那么  $G_{NT}(u, v)$  函数可表示为

$$G_{NT}(u, v) = w^3 P_0 + u^3 P_1 + v^3 P_2 + 3w^2 u P_{01} + 3w^2 v P_{02} + 3u^2 w P_{10} + 3u^2 v P_{12} + 3v^2 w P_{20} + 3v^2 u P_{21} + 6uvwQ \quad (1)$$

其中  $u+v+w=1$ ,  $Q_0, Q_1, Q_2$  同一个控制单元内一个角控制点相应的 2 个内部控制点的混合函数，它们表示为

$$\begin{aligned} Q_0 &= \frac{uq_{01} + vq_{02}}{u+v} \\ Q_1 &= \frac{uq_{12} + wq_{10}}{v+w} \\ Q_2 &= \frac{wq_{20} + uq_{21}}{w+u} \end{aligned} \quad (2)$$

那么  $Q = wQ_0 + uQ_1 + vQ_2$ 。

我们利用这种新的 Gregory 三角面片对给定的数据进行插值，实现  $G^1$  连续的光滑曲面<sup>[9]</sup>。

## 2 $G^1$ 连续性条件

一个满足  $G^1$  连续性条件的曲面具有以下特性：在这个曲面的任意一点，只有唯一一条法线。为了保证全局的  $G^1$  连续性，我们需要保证 2 个相邻面片的公共边界能够连续。

相邻 Gregory 三角面片间的连续性：2 个相邻的 Gregory 三角面片  $S^1$  和  $S^2$  如图 2 所示。2 个相邻面片之间的公共边界曲线分别定义了四边界控制点： $\{P_0 = P'_0, P_{02} = P'_{02}, P_{20} = P'_{20}, P_2 = P'_2\}$ 。

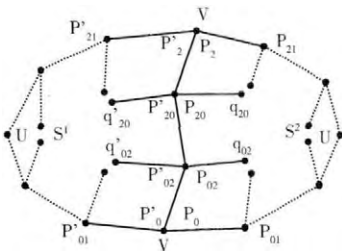


图 2 两相邻 Gregory 三角面片

为了能够更加容易、清楚的对其表述，我们将 Gregory

三角面片转化为  $(u, v)$  2 个变量表达式。用  $S_u$  表示  $u$  方向的偏导数， $S_v$  表示  $v$  方向的偏导数，那么两相邻 Gregory 三角面片  $S^1$  和  $S^2$  满足  $G^1$  连续的充分必要条件，即方程

$$S_u^2(0, v) = k(v)S_u^1(0, v) + h(v)S_v^1(0, v) \quad (3)$$

这里， $k(v)$  和  $h(v)$  是有关  $v$  的标量函数，即公式：

$$\begin{aligned} k(v) &= k_0(1-v) + k_1v \\ h(v) &= h_0(1-v) + h_1v \end{aligned} \quad (4)$$

式中： $k_0, k_1, h_0, h_1$ ——任意实数。

如果式 (3) 中的  $S_u^2(0, v), S_v^1(0, v), S_v^2(0, v)$  于 Bernstein 多项式两三角面片的  $G^1$  连续条件，即方程

$$\sum_{j=0}^2 B_j^2(v)F_j = k(v)\sum_{j=0}^2 B_j^2(v)E_j + h(v)\sum_{j=0}^2 B_j^2(v)D_j \quad (5)$$

这里， $B_j^2(v), j=0, 1, 2$  为二次 Bernstein 基底函数，并且有

$$\begin{aligned} F_0 &= P_{01} - P_0 \\ F_1 &= (1-v)(q_{02} - P_{02}) + v(q_{20} - P_{02}) \\ F_2 &= P_{21} - P_{20} \\ E_0 &= P'_{01} - P'_0 \\ E_1 &= (1-v)(q'_{02} - P'_{02}) + v(q'_{20} - P'_{02}) \\ E_2 &= P'_{21} - P'_{20} \\ D_0 &= P'_{02} - P'_0 \\ D_1 &= P'_{20} - P'_{02} \\ D_2 &= P'_{21} - P'_{20} \end{aligned} \quad (6)$$

$F_j, E_j, D_j$  称为相邻控制点对的向量组， $F_j, E_j$  为交叉切向量， $D_j$  为公共边界切向量。

对条件方程 (5) 进行求解，可得两三角面片间的  $G^1$  连续性条件，即方程组

$$\begin{aligned} F''_0 &= k_0E''_0 + h_0D_0 \\ F''_3 &= k_1E''_3 + h_1D_2 \\ E''_1 &= (E''_0 + E''_3 + D_2)/2 \\ E''_2 &= (E''_0 + E''_3 + D_2 - 2D_1)/2 \\ F''_1 &= (2k_0E''_1 + k_1E''_0 + h_1D_0 + 2h_0D_1 - F''_0)/2 \\ F''_2 &= (2k_1E''_2 + k_0E''_3 + 2h_1D_1 + h_0D_2 - F''_3)/2 \end{aligned} \quad (7)$$

从式 (7) 可得到，沿着公共边界的 2 个相邻三角面片的  $G^1$  连续是由边界控制点和内部控制点确定的，只是沿着共同的边界曲线通过调整四个内部控制点的位置对 2 个 Gregory 三角面片进行拼接，产生  $G^1$  连续的光滑表面。

图 3 表示 2 个相邻面片的拼接，图中垂直面片的线表示控制点所对应的法线。图 3 (a) 表示 2 个面片在公共边界线处具有相同起点的法线不是一致的，导致  $G^1$  不连续，图 3 (b) 表示 2 个面片在公共边界线处的法线是一致的， $G^1$  连续。从扩大部分可见，图 3 (a) 的曲率等值面与曲面交线是不连续的，而图 3 (b) 的曲率等值面与曲面交线是连续的。

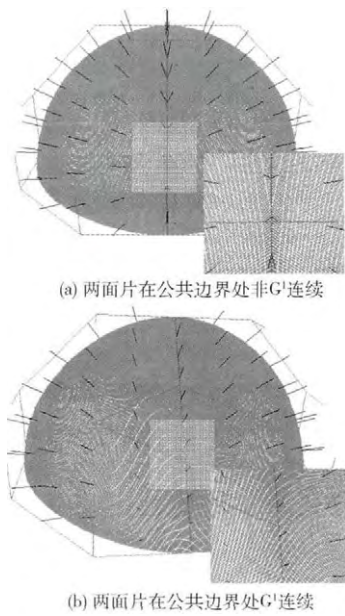


图 3 2 个相邻三角面片

### 3 实验结果

由于 Gregory 三角面片插值方法不能直接用于上述情况, 需要预处理原始网格, 将基本的三角面片<sup>[11]</sup>调整为 Gregory 三角面片, 然后使用 Gregory 三角面片进行插值生成  $G^1$  光滑曲面的过程<sup>[12]</sup>, 即: ①为每一个三角面片的控制顶点生成一个统一的法向量。②为三角面片的每条边界生成边界控制点。③计算每个面片的内部控制点。根据  $G^1$  连续条件的式 (8), 可以计算出相对应的内部控制点。④插值每个 Gregory 三角面片控制网格。根据  $G_{NT}(u, v)$  (式 (1)) 中  $(u, v)$  步长的选择, 对形体的全局 Gregory 三角控制网格插值, 并构造出  $G^1$  连续的光滑形体表面。

通过上述介绍的方法对形体曲面的三角形控制网格进行插值, 生成  $G^1$  连续光滑曲面。4 个实例形体的  $G^1$  光滑表面重建结果如图 4~图 7 所示。

图 4 为 cow 的 Gregory 三角面片的插值过程, ■表示角控制点, ▲表示边界控制点, ●表示内部控制点。图 4 (a) 为相邻两三角面片的原始控制点, 图 4 (b) 为局部两相邻三角面片通过上述的步骤 (2)、步骤 (3) 计算获得边界控制点和内部控制点, 组成相应的 Gregory 三角面片, 图 4 (c) 为全局的控制网格所组成的 cow 模型, 图 4 (d) 为插值过后得到的  $G^1$  光滑曲面。

由于模型中组成三角面片的原始控制点以及通过对原始的三角面片进行预处理得到的 Gregory 三角面片与 cow 模型中 (a)(b) 的相似, 图 5~图 7 分别表示其相应的全局控制网格所组成的模型以及插值后得到的光滑曲面结果。

### 4 结束语

Gregory 三角面片插值方法为构造光滑连续的形体表面

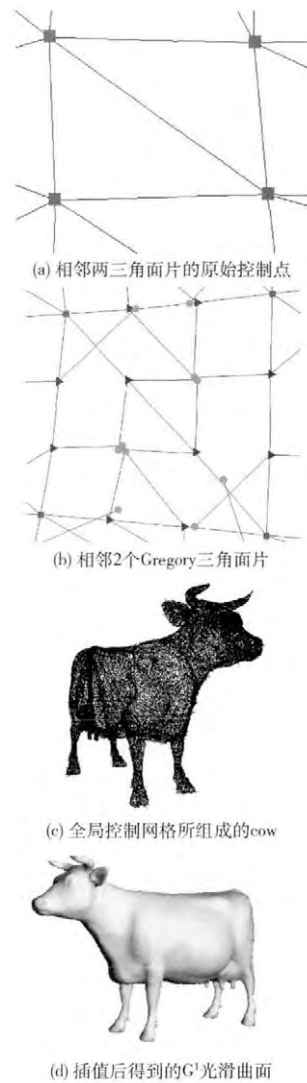


图 4 cow 的 Gregory 三角面片插值过程

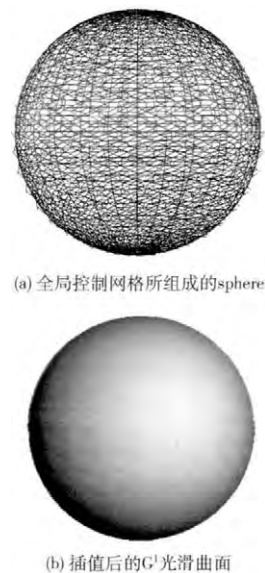


图 5 sphere 的 Gregory 三角面片插值

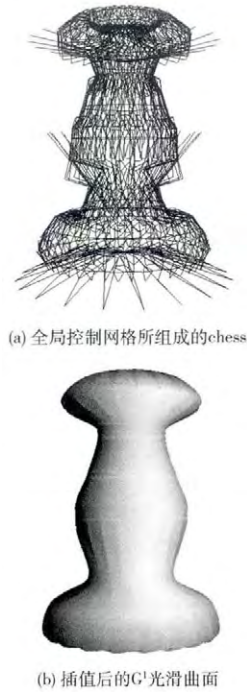


图 6 chess 的 Gregory 三角面片插值



图 7 dinosaur 的 Gregory 三角面片插值

提供了新的途径，随着对三维模型形体设计要求的不断提高，不仅要求光滑甚至要求三维模型形体表面达到一定的光滑标准，因此对形体表面造型技术的基础研究仍然有很大需求。相比传统的 Gregory 三角面片，采用新双三次 Gregory 三角面片插值方法构造  $G^1$  连续的光滑表面，仅仅通过调整所产生的相邻内部控制点，而没有改变原始的顶点信息。实验结果表明了该插值方法不仅能够重建任意拓扑结构，而且还可以使用原始数据产生令人满意的光滑表面。

今后的研究方向可以生成更加光滑（二阶几何连续）的三维模型形体表面，从三维模型的形体点云和控制网格以及曲面的高阶几何连续拼接条件为前提，对生成高质量的形体曲面做更加深入的研究。

参考文献：

[1] Farin G. Curves and surfaces for computer aided geometric de-

sign: A practical guide [M] 4th ed. New York: Academic Press, 1997: 64-306.

[2] HAO RU, LIU Runtao. Joining between adjacent rational Bezier surfaces [J]. Computer Engineering and Application, 2010, 46 (4): 174-175 (in Chinese). [郝茹, 刘润涛. 双四次有理 Bezier 曲面  $G^1$  光滑拼接算法 [J]. 计算机工程与应用, 2010, 46 (4): 174-175.]

[3] GAO Zhanheng, LIANG Xuezhong, GAO Fushun, et al. Research on  $G^1$  continuity conditons between B-spline surfaces and construction of local scheme [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2007, 19 (7): 866-870 (in Chinese). [高占恒, 梁学章, 高福顺, 等. B 样条曲面间  $G^1$  连续条件及局部格式构造问题 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2007, 19 (7): 866-870.]

[4] SHI Kanle, YONG Junhai, SUN Jiaguang, et al.  $G^n$  filling orbicular N-sided holes using periodic B-spline surfaces [J]. Science China: Information Science, 2011, 41 (9): 1112-1125 (in Chinese). [施侃乐, 雍俊海, 孙家广. 基于周期 B 样条曲面的环状 N 边洞  $G^n$  连续性过渡 [J]. 中国科学: 信息科学, 2011, 41 (9): 1112-1125.]

[5] Farouki RT, Szafran N, Biard L. Construction and smoothing of triangular coons patches with geodesic boundary curves [J]. Computer Aided Geometric Desgin, 2010, 27 (4): 301-312.

[6] Kouichi Konno, Hiroaki Chiykura. An approach of designing and controlling free-form surfaces by using NURBS boundary Gregory patches [J]. Computer Aided Geometric Design, 1996, 13 (9): 825-849.

[7] ZHU Xinxiong. The modeling technology of free-form curve and surface [M]. Beijing: Science Press, 2000: 198-232 (in Chinese). [朱心雄. 自由曲线曲面造型技术 [M], 北京: 科学出版社, 2000: 198-212.]

[8] ZHANG Lei, WANG Guo-jin. Computation of lower derivatives of rational triangular Bezier surfaces and their bounds estimation [J]. Journal of Zhejiang University Science, 2005, 6 (1): 108-115.

[9] Barnhill R E, Gregory J A. Compatible Smooth Interpolation in Triangles [J]. Journal of Approximation Theory, 1975, 15 (3): 214-225.

[10] Zhang Zhiyi, Wang Zhenhua, He Dongjian. A New Bi-cubic Triangular Gregory Patch [C] // Proceedings of the 2008 International Conference on Computer Science and Software Engineering. Wu-Han: IEEE Computer Society Press, 2008: 1003-1007.

[11] Hans Hagen, Gregory Nielson, Yasuo Nakajima. Surface design using triangular patches [J]. Computer Aided Geometric Design, 1996, 13 (9): 895-904.

[12] Long Yang, Dongjia He, ZhiyiZhang, Construction of  $G1$  smooth surface employing triangular Gregory Patches [C] //Proceedings of the 5th International Conference on Image and Graphics. Xi'an: IEEE Computer Society Press, 2009: 577-580.